Eine Kennzeichnung der endlichen einfachen Gruppe der Ordnung 604 800

Von VOLKER STINGL in Mainz (BRD)

§ 1. Einleitung

Im Jahre 1967 entdeckte Z. JANKO eine neue sporadische einfache Gruppe der Ordnung 604 800. Diese Gruppe, die wir mit J_2 bezeichnen wollen, enthält genau zwei Konjugiertenklassen von Involutionen. Der Zentralisator einer Involution, die nicht im Zentrum einer Sylow-2-Untergruppe von J_2 vorkommt, ist dabei isomorph zum direkten Produkt einer Vierergruppe mit PSL (2, 5).

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Gruppe J_2 durch den Zentralisator einer nicht 2-zentralen Involution zu kennzeichnen.

Für die Problemstellung und zahlreiche wertvolle Hinweise und Ratschläge möchte ich Herrn Prof. Dr. D. HELD hiermit noch einmal herzlichst danken.

Wir beweisen nun das folgende Resultat:

Satz. *Sei G eine endliche einfache Gruppe und t eine Involution in G, so daß $C_G(t)/\mathrm{O}(C_G(t))$ isomorph ist zum direkten Produkt einer Vierergruppe mit $PSL(2, q)$, die Primzahlpotenz q sei kongruent drei oder fünf modulo acht. Dann ist G isomorph zu J_2.*

Mit J_2 sei stets die in [6] beschriebene endliche einfache Gruppe der Ordnung 604 800 gemeint.

Im weiteren bezeichne G immer eine Gruppe, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, und t sei eine festgewählte Involution in G, deren Zentralisator die oben angegebene Struktur besitzt.

Die Bezeichnungsweise folgt im wesentlichen [1] und [5]. Ferner werden folgende Symbole benutzt:

$\lvert X\rvert_2$ (bzw. $\lvert X\rvert_{2'}$)	2-Anteil (bzw. 2′-Anteil) der Ordnung von X	
D_n	Diedergruppe	der Ordnung n
Q_n	verallg. Quaternionengruppe	der Ordnung n
Z_n	zyklische Gruppe	der Ordnung n
E_n	elementar abelsche Gruppe	der Ordnung n

$\mathrm{Syl}_p(X)$	Menge der Sylow-p-Untergruppen von X
$X \pmod N)_Y$	volles Urbild der Untergruppe X von Y/N in Y

Es sei $N(X)=N_G(X)$ bzw. $C(X)=C_G(X)$ für Teilmengen X von G und $C=C(t)$. Wir setzen $C/O(C)=E\times P$ mit $E\cong E_4$ und $P\cong PSL(2,q)$, q sei kongruent drei oder fünf modulo acht.

§ 2. Die Berechnung von $N(A)/C(A)$

Lemma 2.1. *Es sei A eine Sylow-2-Untergruppe von C. Es kann A geschrieben werden als direktes Produkt zweier Vierergruppen V und W mit $V\in\mathrm{Syl}_2(E(\mathrm{mod}\ O(C))_C)$ und $W\in\mathrm{Syl}_2(P(\mathrm{mod}\ O(C))_C)$. Die Involution t liegt in V. Wir setzen $V=\langle t,u\rangle$ und $W=\langle i,z\rangle$. Es gilt: $|N(A)/C(A)|=6n$, $1\leqq n\leqq 6$. Es existiert ein Element ϱ der Ordnung drei, unter dessen Operation die* 15 *Involutionen aus A in folgende Konjugiertenklassen zerfallen:*

$$\{i,z,iz\},\quad \{t\},\quad \{ti,tz,tiz\},\quad \{u\},\quad \{ui,uz,uiz\},\quad \{ut\},\quad \{uti,utz,utiz\}.$$

Beweis. Aufgrund eines Ergebnisses von Walter [9] kann A keine Sylow-2-Untergruppe von G sein, und damit teilt zwei die Ordnung von $N(A)/C(A)$. Aus der Voraussetzung des Satzes erhalten wir: $|N_{C/O(C)}(AO(C)/O(C))|=3$. Mit Hilfe des Frattini-Argumentes folgt, daß auch drei ein Teiler der Ordnung von $N(A)/C(A)$ ist. Außerdem kann in $N(A)\cap C/C(A)$ ein Element $\varrho\neq 1$ gewählt werden mit $t^\varrho=t$, $u^\varrho=u$, $i^\varrho=z$, $z^\varrho=iz$.

Da A echt in einer Sylow-2-Untergruppe T von G enthalten ist, muß $Z(T)$ echt in A enthalten sein. Folglich sind nicht alle Involutionen aus A in G konjugiert. Die Anzahl der Konjugierten von t unter $N(A)$ wird durch $|N(A)/C(A)\colon N(A)\cap C/C(A)|$ geliefert. Also ist die Ordnung von $N(A)/C(A)$ kleiner als 45. Nach dem oben bewiesenen Teil erhalten wir insgesamt $|N(A)/C(A)|=6n$, wobei n zwischen eins und sieben liegt. Da die Gruppe $GL(4,2)$ keine Untergruppe der Ordnung 42 enthält, scheidet der Fall $n=7$ aus. Das Lemma ist bewiesen.

Lemma 2.2. *Für jede Involution α aus $N(A)/C(A)$ gilt $t^\alpha\notin W$.*

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Es gibt also eine Involution α in $N(A)/C(A)$, die t in W abbildet. Da t in W^α liegt und die Elemente aus W^α in G konjugiert sind, ist $W\cap W^\alpha=\langle 1\rangle$, folglich muß A direktes Produkt von W und W^α sein. Es ist t im Durchschnitt von V und W^α enthalten. Da die Involution α in A mindestens eine Vierergruppe zentralisiert, rechnet man leicht nach, daß sogar $W^\alpha=V$ und $V^\alpha=W$ gilt.

Unter der Operation von α und ϱ zerfällt A in zwei Konjugiertenklassen von Involutionen mit den Vertretern t und ti, die Länge der Klassen beträgt 6 bzw. 9.

Das erzwingt $|N(A)/C(A)|=18$. Eine Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ hat die Ordnung 2^5, die Operation von α auf A bewirkt $|Z(S)|=4$. Also ist A charakteristisch in S, dies bedeutet, daß S schon Sylow-2-Untergruppe von G ist. Mit Hilfe von [3, Lemma 2, Seite 389] sieht man, daß G nicht einfach ist. Dies widerspricht der Voraussetzung des Satzes. Die Annahme zu Beginn des Lemmas ist falsch, die Behauptung daher richtig.

Lemma 2.3. *Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten der Operation von Involutionen aus $N(A)/C(A)$ auf A, nämlich:*

(i) *t^α liegt in V für jede Involution α aus $N(A)/C(A)$,*

(ii) *es existiert eine Involution in $N(A)/C(A)$, die t in $A\setminus(V\cup W)$ abbildet. Im ersten Falle gilt $|N(A)/C(A)|=6$ oder 24, im zweiten Falle enthält $N(A)/C(A)$ eine zu A_4 isomorphe Untergruppe.*

Beweis. Liegt Fall (i) vor, so besitzt eine Sylow-2-Untergruppe von $N(A)/C(A)$ genau eine Involution. Diese normalisiert V, ohne t zu zentralisieren. Mit Hilfe von Lemma 2.1 sehen wir, daß die Anzahl a_t der zu t unter $N(A)$ konjugierten Involutionen zwischen 2 und 12 liegt. Außerdem ist a_t kongruent null modulo zwei und kongruent zwei modulo drei. Es folgt, daß t unter $N(A)$ zwei oder acht Konjugierte besitzt. Die Behauptungen für den Fall (i) sind damit bewiesen.

Sei $M=\{\{ti, tz, tiz\}, \{ui, uz, uiz\}, \{uti, utz, utiz\}\}$ und M_1 ein Element aus M. Gibt es eine Involution α in $N(A)/C(A)$ mit $t^\alpha\in M_1$ und $m^\alpha\in M_1$ für ein von t^α verschiedenes Element m aus M_1, so operiert die von α und ϱ erzeugte Gruppe der Ordnung zwölf als Permutationsgruppe auf der Ziffernmenge $\{t\}\cup M_1$, und die Behauptung ist bewiesen.

Wir können also annehmen: $t^\alpha\in M_1$, $m^\alpha\notin M_1$ für ein von t^α verschiedenes Element m aus M_1. Setze $U=\langle\varrho, \alpha\rangle$ und $a_t=$Anzahl der Konjugierten von t unter U. Offensichtlich ist a_t größer als vier. Hat a_t den Wert sechs, so sind gerade die Involutionen aus V und M_1 zu t konjugiert, insbesondere ist $(V^{\#})^\alpha=M_1$. Das liefert einen Widerspruch, da V Gruppe ist $M\cup\{1\}$ jedoch nicht.

Sei $a_t=8$, dies bedeutet, daß U die Ordnung 24 besitzt. Daraus ergibt sich $o(\alpha\cdot\varrho)=4$ und $U\cong S_4$ oder $o(\alpha\cdot\varrho)=6$ und $U\cong A_4\times Z_2$.

Ist $a_t=10$, so hat U die Ordnung 30 und besitzt eine normale Sylow-3-Untergruppe. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß U von einer Involution und einem Element der Ordnung drei erzeugt wird.

Sei schließlich $a_t=12$. Bis auf i, z, iz sind nun alle Involutionen aus A zu t konjugiert. Für ein von t^α verschiedenes Element m aus M_1 gilt $mm^\alpha\notin\{i, z, iz\}$, aber $\alpha\in C(mm^\alpha)$. Dies liefert einen Widerspruch.

Wir haben gesehen, daß a_t nur den Wert acht annehmen kann, in diesem Falle ist aber die Behauptung des Lemmas richtig.

Lemma 2.4. *Liegt der Fall* (i) *aus Lemma* 2.3 *vor, so haben wir:*
(i)$_1$ $N(A)/C(A) \cong Z_6$ *oder* (i)$_2$ $N(A)/C(A) \cong SL(2, 3)$.

Im Falle (ii) *aus Lemma* 2.3 *sei* U *eine zu* A_4 *isomorphe Untergruppe und* $S_1 \in \mathrm{Syl}_2(U(\mathrm{mod}\ C(A))_{N(A)})$. *Dann gilt:*
(ii)$_1$ $Z(S_1) = \langle ut \rangle$, $N(A)/C(A) \cong A_4$, S_4 *oder* $A_4 \times Z_2$,
(ii)$_2$ $Z(S_1) = W$, $N(A)/C(A) \subseteq A_4$, S_4 *oder* $A_4 \times Z_3$,
(ii)$_3$ $Z(S_1) = \langle ut \rangle \times W$, $N(A)/C(A) \cong A_4$, S_4 *oder* $A_4 \times Z_2$.

Beweis. Es liege zunächst der Fall (i) vor mit $|N(A)/C(A)| = 6$. Wir setzen $N(A)/C(A) = \langle \varrho, \alpha \rangle$, wobei α eine Involution sei und ϱ den Automorphismus der Ordnung drei aus Lemma 2.1 bezeichne. Wir können o. B. d. A. annehmen, daß $t^\alpha = u$ gilt. Die Involution α zentralisiert in A mindestens eine Gruppe der Ordnung acht, da andernfalls wie in Lemma 2.2 ein Widerspruch zur Einfachheit von G folgt. Ist $W^\alpha \neq W$, so gilt $W \in \{\{ti, tz, tiz\}, \{ui, uz, uiz\}, \{uti, utz, utiz\}\}$, was aber einen Widerspruch liefert, da W Gruppe ist. Es wird also W von α normalisiert, insbesondere erhalten wir $C_A(\alpha) = \langle ut \rangle \times W$. Die Elemente α und ϱ sind auf den vier Erzeugenden t, u, i, z von A vertauschbar, die Behauptung (i)$_1$ ist richtig.

Sei nun im Fall (i) von Lemma 2.3 die Ordnung von $N(A)/C(A)$ gleich 24. Dann sind die Sylow-2-Untergruppen von $N(A)/C(A)$ isomorph zu Q_8. Eine Sylow-3-Untergruppe von $N(A)/C(A)$ liegt nicht normal, da es in GL(4, 2) keine Elemente der Ordnung zwölf gibt. Man rechnet nun nach, daß die Sylow-2-Untergruppe von $N(A)/C(A)$ normal liegt und daher die Behauptung $N(A)/C(A) \cong SL(2, 3)$ folgt.

In Lemma 2.3 haben wir bewiesen, daß es im Falle (ii) eine zu A_4 isomorphe Untergruppe in $N(A)/C(A)$ gibt. Es ist $|N(A)/C(A)| = 12$, 24 oder 36. Gilt $|N(A)/C(A)| = 24$, so können die Sylow-2-Untergruppen von $N(A)/C(A)$ nur isomorph zu D_8 oder E_8 sein. Im ersten Falle ergibt sich $N(A)/C(A) \cong S_4$, im zweiten Falle folgt $N(A)/C(A) \cong A_4 \times Z_2$. Gilt $|N(A)/C(A)| = 36$, so liegt die Vierergruppe aus der zu A_4 isomorphen Untergruppe normal in $N(A)/C(A)$, mithin folgern wir $N(A)/C(A) \cong A_4 \times Z_3$.

Sei U die zu A_4 isomorphe Untergruppe von $N(A)/C(A)$, die den Automorphismus ϱ von A aus Lemma 2.1 enthält. Wir wählen uns $S_1 \in \mathrm{Syl}_2(U(\mathrm{mod}\ C(A))_{N(A)})$. Das Zentrum von S_1 ist echt in A enthalten. Unter der Annahme $Z(S_1) \cong E_8$ erhalten wir $Z(S_1) \cap V \neq \langle 1 \rangle$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $Z(S_1) \cap V = \langle ut \rangle$. Mit Hilfe des Frattini-Argumentes sehen wir, daß $Z(S_1)$ das direkte Produkt von $\langle ut \rangle$ und W ist. Die Involution t kann in A maximal acht Konjugierte besitzen, es schneidet der Fall $N(A)/C(A) \cong A_4 \times Z_3$ aus.

Ist $Z(S_1) \cong E_4$, so schließt man leicht, daß $Z(S_1)$ gleich W ist. Jede Involution aus U zentralisiert in A genau die Gruppe W. Unter U haben t, u und ut jeweils vier Konjugierte in A. Die Konjugiertenklassen sind: $\{t, ti, tz, tiz\}$, $\{u, ui, uz, uiz\}$, $\{uti, utz, utiz, ut\}$. Es gibt eine Involution α in U mit $t^\alpha = ti$, $tz^\alpha = tiz$, $u^\alpha = uz$ und

$ui^{\alpha}=uiz$. Man rechnet nun leicht nach, daß es keine mit α vertauschbare Involution β gibt, die t auf u abbildet und W zentralisiert. Eine solche Involution müßte aber im Falle $N(A)/C(A)\cong A_4\times Z_2$ existieren, also tritt dieser Fall nicht auf, wenn $Z(S_1)$ die Ordnung vier hat.

Ist $Z(S_1)$ isomorph zu Z_2, so liegt $Z(S_1)$ in V. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\langle ut\rangle=Z(S_1)$. Es ist klar, daß eine Involution aus U nur eine Vierergruppe in A zentralisiert. Außerdem wird W von keiner Involution aus U normalisiert. Damit ergibt sich, daß eine Involution aus W unter U genau sechs Konjugierte hat und von einem 2-Element aus U zentralisiert wird. Also hat t in A nicht mehr als acht Konjugierte, der Fall $N(A)/C(A)\cong A_4\times Z_3$ ist nicht möglich.

§ 3. Der Fall $(i)_1$ aus Lemma 2.4

Lemma 3.1. *Sei S eine Sylow-2-Untergruppe von $N(A)$ und $N(A)/C(A)$ sei isomorph zu Z_6. Dann ist S isomorph zum direkten Produkt einer Diedergruppe der Ordnung acht und einer Vierergruppe.*

Beweis. Wir wissen schon, daß S die Ordnung 2^5 hat und $Z(S)$ in A enthalten ist, weiterhin ist $Z(S)$ von der Ordnung acht. Gibt es in $S\setminus A$ keine Involutionen, so liegt A charakteristisch in S und S ist schon Sylow-2-Untergruppe von G. Es sei x ein Element aus $S\setminus A$. Die Anwendung von [8, Lemma 5.38, Seite 411, Thompson Transfer Lemma] auf die maximale Untergruppe $\langle x, Z(S)\rangle$ von S und die Involution t liefert einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

Es gibt nun Involutionen in $S\setminus A$, und die Behauptung des Lemmas folgt.

Lemma 3.2. *Im Falle $N(A)/C(A)\cong Z_6$ ist eine Sylow-2-Untergruppe von G isomorph zum direkten Produkt einer Diedergruppe und einer Vierergruppe.*

Beweis. Ist eine Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)/C(A)$ schon Sylow-2-Untergruppe von G, so folgt die Behauptung mit Hilfe von Lemma 3.1.

Es sei nun T eine Sylow-2-Untergruppe von G, die S enthält, und T_0 maximal in T bezüglich folgender Eigenschaften:

(i) $S\subseteqq T_0$, (ii) $T_0=T_1\times T_2$ mit $T_1\cong D_2 m-3\leqq m$, und $T_2\cong E_4$.

Wir nehmen nun an, daß T_0 echt in T enthalten sei. Es enthält T_0 genau zwei Konjugiertenklassen von elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16. Wir finden ein Element x in $N_T(T_0)\setminus T_0$, dessen Quadrat in T_0 liegt. Sind in der Nebenklasse xT_0 keine Involutionen vorhanden, so ergibt sich $\langle x, T_0\rangle\in \mathrm{Syl}_2(G)$. Es sei T_Z die maximale zyklische Untergruppe von T_1. Die Gruppe $\langle x, T_Z\times T_2\rangle$ ist maximal in $\langle x, T_0\rangle$ und enthält t nicht. Mit Hilfe des Thompson Transfer Lemmas erhalten wir einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

Es gibt Involutionen in xT_0, o. B. d. A. sei $x^2=1$. Wir wählen in T_0 zwei Involutionen u und b, die in T_0 nicht konjugiert sind und folgende Eigenschaften besitzen: $a^x=b$, $\langle a, b\rangle \cong D_2m$. Das Erzeugnis von x und a ist dann isomorph zu D_2m+1. Man stellt fest, daß x zentralisierend auf $Z(T_1)\times T_2$ operiert. Die Gruppe $\langle x, T_0\rangle$ ist demnach isomorph zum direkten Produkt einer Diedergruppe mit einer Vierergruppe, was der maximalen Wahl von T_0 widerspricht. Folglich gilt $T_0=T$, die Behauptung ist bewiesen.

Lemma 3.3. *Der Fall $N(A)/C(A)\cong Z_0$ tritt nicht auf.*

Beweis. Da nach Lemma 3.2 eine Sylow-2-Untergruppe T von G isomorph zum direkten Produkt einer Diedergruppe mit einer Vierergruppe ist und G mindestens zwei Konjugiertenklassen von Involutionen besitzt, folgt mit Hilfe des Thompson Transfer Lemmas ein Widerspruch zur Einfachheit von G.

§ 4. Der Fall $(i)_2$ aus Lemma 2.4

Lemma 4.1. *Es sei $N(A)/C(A)$ isomorph zu $SL(2, 3)$ und α die zentrale Involution in $N(A)/C(A)$. Mit B bezeichnen wir das volle Urbild von $\langle\alpha\rangle$ in $N(A)$. Es sei S_1 eine Sylow-2-Untergruppe von B und S eine Sylow-2-Untergruppe von $N(A)$, die S_1 enthält. Dann gilt: $N(A)/B\cong A_4$, $S/S_1\cong E_4$, $S_1\cong D_8\times E_4$, $Z(S_1)=\langle ut\rangle\times W$. Es operiert $N(A)/B$ treu auf $Z(S_1)$, aber trivial auf $\langle ut\rangle$.*

Beweis. Es ist $SL(2, 3)/Z(SL(2, 3))=PSL(2, 3\cong A_4$ und die beiden ersten Behauptungen folgen. Da A ein maximaler elementar abelscher Normalteiler von S ist, gibt es eine Gruppe A_0 der Ordnung acht in A, die ebenfalls normal in S liegt. Die Involution α aus $N(A)/C(A)$ operiert trivial auf A_0. Wir wissen, daß t^α in V ist, o. B. d. A. sei $t^\alpha=u$. Unter $N(A)$ hat t außer sich selbst und u noch genau sechs weitere Konjugierte. Es folgt $A_0=\langle ut, i, z\rangle$. Gibt es in $S_1\setminus A$ keine Involutionen, so liegt A charakteristisch in S, es ist S eine Sylow-2-Untergruppe von G. Seien y_1 und y_2 aus $S\setminus S_1$ so gewählt, daß S von A, y_1 und y_2 erzeugt wird. Die maximale Untergruppe $\langle y_1, y_2, A_0\rangle$ von S enthält t nicht ,wir erhalten einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Ist nun x eine Involution in $S_1\setminus A$, so ergibt sich: $S_1= =\langle x, t\rangle\times W\cong D_8\times E_4$.

Da der Automorphismus ϱ aus $N(A)/C(A)$ nichttrivial auf $Z(S_1)$, aber trivial auf $\langle ut\rangle$ operiert, genügt es zu zeigen, daß ein Element β der Ordnung vier aus $N(A)/C(A)$ nichttrivial auf $Z(S_1)$, aber trivial auf $\langle ut\rangle$ wirkt, um die letzte Behauptung von Lemma 4.1 zu beweisen. Dies ist aber richtig, da tt^β in A_0 liegt und von $(tt^\beta)^\beta$ verschieden ist. Außerdem liegt $\langle ut\rangle$ charakteristisch in S_1. Damit haben wir alle Behauptungen bewiesen.

Lemma 4.2. *Es sei wieder $N(A)/C(A)$ isomorph zu $SL(2, 3)$. Mit T bezeichnen wir eine Sylow-2-Untergruppe von G, die $S \in \mathrm{Syl}_2(N(A))$ enthält. Die Untergruppe S_1 von S sei wie in Lemma 4.1 definiert. Es gilt: $C_T(Z(S_1))$ ist isomorph zum direkten Produkt einer Diedergruppe mit einer Vierergruppe.*

Beweis. Wir wissen schon, daß $C_S(Z(S_1)) = S_1$ isomorph zu $D_8 \times E_4$ ist. Im Falle $C_T(Z(S_1)) = C_S(Z(S_1))$ ist die Behauptung richtig. Sei nun $S_1 \subsetneqq C_T(Z(S_1))$, mit T_0 sei eine Untergruppe maximaler Ordnung von $C_T(Z(S_1))$ bezeichnet, die S_1 enthält und isomorph zum direkten Produkt einer Diedergruppe mit einer Vierergruppe ist. Wir nehmen an, daß T_0 echt in $C_T(Z(S_1))$ ist. Es existiert ein Element x in $C_T(Z(S_1)) \setminus T_0$ mit $T_0^x = T_0$ und $x^2 \in T_0$. Aufgrund der maximalen Wahl von T_0 gibt es in xT_0 keine Involutionen. Alle elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 von $\langle x, T_0 \rangle$ liegen daher schon in T_0 und sind unter $\langle x, T_0 \rangle$ konjugiert. Es folgt $\langle x, T_0 \rangle = C_T(Z(S_1))$. Wir wählen Elemente y_1 und y_2 in $S \setminus S_1$, so daß $\langle y_1, y_2, S_1 \rangle = S$ wird. Dann gilt $\langle x, T_0, y_1, y_2 \rangle = T \in \mathrm{Syl}_2(G)$. Es sei D eine maximale Diedergruppe in T_0 und D_Z der zyklische Normalteiler vom Index zwei in D. Die Gruppe $\langle D_Z \times W, y_1, y_2, x \rangle$ hat den Index zwei in T und enthält t nicht. In $\langle D_Z \times W, y_1, y_2, x \rangle$ gibt es keine elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16, aber der Zentralisator einer jeden Involution in dieser Gruppe ist mindestens von der Ordnung 16. Dies zeigt, daß ein Widerspruch zur Einfachheit von G folgt. Also gilt $T_0 = C_T(Z(S_1))$, und die Behauptung ist bewiesen.

Lemma 4.3. *Wir übernehmen die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus Lemma 4.2. Wir setzen $T_0 = C_T(Z(S_1))$ und $T_1 = \langle T_0, y_1, y_2 \rangle$, wobei y_1 und y_2 Elemente aus $S \setminus S_1$ sind mit $\langle S_1, y_1, y_2 \rangle = S$. Es gibt nun eine echte Untergruppe T_2 von $T \in \mathrm{Syl}_2(G)$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:* (i) $|T_2 : T_1| = 2$, (ii) *T_0 ist normal in T_2 und T_2/T_0 ist isomorph zu D_8,* (iii) *es gibt eine Involution x in $T_2 \setminus T_1$ und eine Involution a in T_0, so daß $\langle x, a \rangle$ isomorph zu einer Diedergruppe ist und $T_2 = \langle x, a, W, y_1, y_2 \rangle$ gilt,* (iv) *jede Vierergruppe aus $\langle x, a \rangle$ liegt in genau einer elementar abelschen Untergruppe der Ordnung 16 von T_2.*

Beweis. Mit Hilfe der Techniken im Beweis von Lemma 4.2 berechnen wir, daß T_1 noch keine Sylow-2-Untergruppe von G sein kann. Es sei x ein Element aus $T \setminus T_1$, das T_1 normalisiert und dessen Quadrat in T_1 liegt. Die beiden Konjugiertenklassen von elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 in T_1 werden durch x verbunden, also normalisiert x die Gruppe $Z(S_1)$, aber zentralisiert sie nicht. Es folgt. $\langle x, T_1 \rangle = N_T(Z(S_1))$ und $\langle x, T_1 \rangle / T_0 = D_8$. Wir setzen $T_2 = \langle x, T_1 \rangle$.

Wir nehmen an, daß es in xT_1 keine Involutionen gibt. Es ergibt sich nun leicht: $T_2 = T \in \mathrm{Syl}_2(G)$. In T_0 gibt es einen maximalen Normalteiler $D_Z \times W$, der t nicht enthält. Die Involution t kann nicht in die maximale Untergruppe $\langle D_Z \times W, y_1, y_2, x \rangle$ von T_2 konjugiert werden, was der Einfachheit von G widerspricht.

Es gibt Involutionen in xT_1, o. B. d. A. sei $x^2=1$. Da x die beiden Konjugiertenklassen von elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 von T_0 miteinander verbinden muß, gibt es Involutionen a und b in T_0, die unter T_0 nicht konjugiert sind, die in T_0 eine Diedergruppe maximaler Ordnung erzeugen und durch x aufeinander abgebildet werden. Es wird dann $\langle x, a\rangle$ isomorph zu einer Diedergruppe, in der $\langle a, b\rangle$ vom Index zwei enthalten ist. Die Behauptung (iii) von Lemma 4.3 folgt.

Wie oben sieht man, daß t nicht in die maximale Untergruppe $\langle ax, W, y_1, y_2\rangle$ von T_2 konjugiert werden kann, also liegt T_2 echt in T. Ein Element y aus $N_T(T_2)\setminus T_2$ mit $y^2\in T_2$ existiert und bewirkt, daß T_2 mindestens doppelt so viele elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 16 besitzt wie T_1. Das ist aber nur möglich, wenn jede Vierergruppe aus $\langle x, a\rangle$ in mindestens einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung 16 von T_1 liegt. Da t zu jeder nichtzentralen Involution von $\langle x, a\rangle$ konjugiert ist, folgt auch die Behauptung (iv) von Lemma 4.3.

Lemma 4.4. *Der Fall* $N(A)/C(A)\cong SL(2,3)$ *tritt nicht auf.*

Beweis. Wir übernehmen die Voraussetzungen und Bezeichnungen von Lemma 4.3. Es sei y ein Element von $T\setminus T_2$ mit $T_2^y=T_2$ und $y^2\in T_2$. Der Durchschnitt aller elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 von T_2 hat die Ordnung vier. Das Erzeignis T_E aller elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 von T_2 hat in T_2 den Index zwei. Die einzigen Involutionen, die ein Element aus yT_2 in T_E zentralisieren kann, liegen schon in $Z(T_E)$. Es folgt, daß die Gruppe $\langle y, T_2\rangle$ genau so viele elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 16 besitzt wie T_2. Alle diese Gruppen sind aber in $\langle y, T_2\rangle$ konjugiert. Wir schließen daher, daß $T=\langle y, T_2\in\rangle$ $\in \mathrm{Syl}_2(G)$ gilt.

Um einen endgültigen Widerspruch zu erlangen, konstruiert man wie in den vorausgegangenen Lemmata eine maximale Untergruppe T_M von T, in die die Involution t nicht durch Elemente aus G hineinkonjugiert werden kann.

§ 5. Der Fall $(ii)_1$ aus Lemma 2.4

Lemma 5.1. *Eine Sylow-2-Untergruppe von* $N(A)$ *hat im Falle* (ii)$_1$ *von Lemma* 2.4 *die Ordnung* 2^7.

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann besitzt eine Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ die Ordnung 2^6, es gilt: $N(A)/C(A)\cong A_4$. Das Zentrum von S liegt in A und hat die Ordnung zwei. Daraus folgert man, daß A die einzige elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 16 von S ist. Mithin gilt $S\in\mathrm{Syl}_2(G)$.

Wir wählen Elemente y_1 und y_2 aus $S\setminus A$, die mit A zusammen bereits ganz S erzeugen. Die drei Nebenklassen y_1A, y_2A und y_1y_2A von A in S enthalten jeweils maximal vier Involutionen, der Zentralisator einer Involution aus $S \setminus A$ hat in S mindestens die Ordnung 16 und ist nicht elementar abelsch. Sei A_0 ein in A enthaltener Normalteiler der Ordnung acht in S. Die Gruppe $\langle A_0, y_1, y_2 \rangle$ enthält t nicht und ist maximal in S. Das Thompson Transfer Lemma liefert nun einen Widerspruch.

Lemma 5.2. *Gilt $N(A)/C(A) \cong S_4$, so enthält eine Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ genau zwei elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 16. Ist T eine Sylow-2-Untergruppe von G, die S enthält, so haben wir $S \subsetneqq T$.*

Beweis. Es sei U eine zu A_4 isomorphe Untergruppe von $N(A)/C(A)$ und S_1 eine Sylow-2-Untergruppe des vollen Urbildes von U in $N(A)$. Ferner sei die Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ so gewählt, daß S_1 in S enthalten ist. Wie in Lemma 5.1 ist A die einzige elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 16 in S_1. Ist A auch in S charakteristisch, so folgt ähnlich wie im vorhergehenden Lemma ein Widerspruch.

Es gibt nun außer A noch genau eine weitere elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 16 in S. Mit x bezeichnen wir ein Element aus dieser Gruppe, das nicht in S_1 liegt. Die beiden Involutionen x und t erzeugen eine Diedergruppe der Ordnung acht, so daß $S = \langle x, t, W, y_1, y_2 \rangle$ wird, wobei y_1 und y_2 Elemente aus $S_1 \setminus A$ sind, die zusammen mit A ganz S_1 erzeugen. Da t in G nicht in die maximale Untergruppe $\langle xt, W, y_1, y_2 \rangle$ von S konjugiert werden kann, darf S noch keine Sylow-2-Untergruppe von G sein.

Lemma 5.3. *Es sei $N(A)/C(A)$ isomorph zu $A_4 \times Z_2$ und α die zentrale Involution in $N(A)/C(A)$. Mit B bezeichnen wir das volle Urbild von $\langle \alpha \rangle$ in $N(A)$. Es sei S_2 eine Sylow-2-Untergruppe von B und S eine Sylow-2-Untergruppe von $N(A)$, die S_2 enthält. Wir erhalten: $N(A)/B \cong A_4$, $S/S_2 \cong E_4$, $S_2 \cong D_8 \times E_4$, $Z(S_2) = \langle ut \rangle \times W$. Es operiert $N(A)/B$ treu auf $Z(S_2)$ und trivial auf $\langle ut \rangle$.*

Beweis. Die beiden ersten Bahauptungen sind trivial. Da A ein maximaler elementar abelscher Normalteiler von S ist, gibt es einen in A enthaltenen Normalteiler A_0 der Ordnung acht in S. Wie in Lemma 4.1 sieht man, daß A_0 das Erzeugnis von ut, i und z sein muß. Es sei U die zu A_4 isomorphe Untergruppe von $A_4 \times Z_2$ und S_1 eine Sylow-2-Untergruppe des vollen Urbildes von U in $N(A)$. Da $Z(S_1) = \langle ut \rangle$ ist, ergibt sich, daß U treu auf A_0 wirkt. Die Automorphismengruppe von A_0 ist isomorph zu $GL(3, 2)$, also operiert α trivial auf A_0. Es folgt $Z(S_2) = \langle ut \rangle \times W$, außerdem sind die beiden letzten Behauptungen von Lemma 5.3 bewiesen. Die Behauptung $S_2 \cong D_8 \times E_4$ folgt wie in Lemma 4.1.

Lemma 5.4. *Der Fall* (ii)$_1$ *aus Lemma* 2.4 *tritt nicht auf.*

Beweis. Mit Hilfe der Lemmata 5.1 bis 5.3 sehen wir, daß im Falle $(\mathrm{ii})_1$ von Lemma 2.4 die Faktorgruppe $N(A)/C(A)$ isomorph zu S_4 oder $A_4 \times Z_2$ ist. Nehmen wir an, daß $N(A)/C(A)$ isomorph zu S_4 ist, so besitzt eine Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ genau zwei elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 16 und hat den Index zwei in einer Sylow-2-Untergruppe T von G. Wir ersetzen im Beweis von Lemma 4.4 die Symbole T_2 bzw. a durch S bzw. t und erzielen wie in Lemma 4.4 einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Ist $N(A)/C(A)$ isomorph zu $A_4 \times Z_2$, so haben wir in Lemma 5.3 die gleichen Behauptungen bewiesen wie in Lemma 4.1. Da die Lemmata 4.2 bis 4.4 nur auf Lemma 4.1 aufbauen, können die Beweise von dort wörtlich übernommen werden. Daraus folgt dann sofort die Behauptung des Lemmas.

§ 6. Der Fall $(ii)_2$ aus Lemma 2.4

Lemma 6.1. *Eine Sylow-2-Untergruppe von $N(A)$ hat im Falle* $(\mathrm{ii})_2$ *von Lemma* 2.4 *die Ordnung* 2^6.

Beweis. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Eine Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ hat dann die Ordnung 2^7 und S/A ist isomorph zu D_8. Mit U sei die zu A_4 isomorphe Untergruppe von $N(A)/C(A)$ bezeichnet und mit S_1 eine Sylow-2-Untergruppe des vollen Urbildes von U in $N(A)$, die in S enthalten ist. Das Zentrum von S_1 ist W, ein Element aus $S \setminus S_1$ operiert nicht trivial auf W. In $S_1 \setminus A$ liegen höchstens zwölf Involutionen, in $S \setminus S_1$ höchstens acht. Der Zentralisator einer jeden Involution aus $S \setminus A$ besitzt eine andere 2-Struktur als der Zentralisator von t. Wir können daher t nicht aus A in $S \setminus A$ herauskonjugieren, insbesondere ist S schon Sylow-2-Untergruppe von G. Es sei wieder A_0 ein in A enthaltener Normalteiler der Ordnung acht von S. Die Elemente x und y aus $S \setminus A$ seien so bestimmt, daß S von A, x und y erzeugt wird. Es ist $\langle A_0, x, y\rangle$ eine maximale Untergruppe von S, in die t nicht durch Elemente aus G hineinkonjugiert werden kann. Wir erhalten einen Widerspruch zur Einfachheit von G.

Lemma 6.2. *Die Faktorgruppe $N(A)/C(A)$ ist im Falle* $(\mathrm{ii})_2$ *von Lemma* 2.4 *isomorph zu $A_4 \times Z_3$, die Gruppe G ist isomorph zu J_2.*

Beweis. Eine Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ hat die Ordnung 2^6, das Zentrum von S ist elementar abelsch der Ordnung vier. Wir nehmen zunächst an, daß S schon eine Sylow-2-Untergruppe von G ist. Aus der Liste aller endlichen einfachen Gruppen in [4], deren Sylow-2-Untergruppen die Ordnung 2^6 haben, entnimmt man, daß G isomorph zu $U_3(4)$ oder $L_3(4)$ sein muß. Da eine Sylow-2-Untergruppe von $U_3(4)$ keinen elementar abelschen Normalteiler der Ordnung 16 besitzt und in einer zu $L_3(4)$ isomorphen Gruppe nur eine Konjugiertenklasse von Involutionen existiert, folgt jedoch ein Widerspruch.

Es sei nun T eine S enthaltenden Sylow-2-Untergruppe von G und x ein Element aus $N_T(S)\setminus S$, dessen Quadrat in S liegt. Wir erhalten für S die folgende Struktur: $S=\langle A, B\rangle$ mit $A\cong B\cong E_{16}$, $W=A\cap B=Z(S)$ und $A^x=B$. Die Gruppe $\langle x, S\rangle$ ist sicher eine Sylow-2-Untergruppe von G, da $\langle x, S\rangle$ genauso viele elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 16 enthält wie S. Wir setzen $T=\langle x, S\rangle$, die Gruppe T hat die folgenden Eigenschaften: (i) $|T|=2^7$, (2) T enthält keinen elementar abelschen Normalteiler der Ordnung acht, (3) T besitzt einen elementar abelschen Normalteiler der Ordnung vier, dessen drei Involutionen in G konjugiert sind, (4) T ist Sylow-2-Untergruppe einer endlichen einfachen Gruppe. Aus den Hauptsätzen in [7] ergibt sich, daß T isomorph zu einer Sylow-2-Untergruppe von J_2 sein muß. Aufgrund einer Arbeit von Gorenstein und Harada [2] und der Tatsache, daß G mindestens zwei Konjugiertenklassen von Involutionen besitzt, folgt $G\cong J_2$. Mit Hilfe von [6, Lemma 3.3 (2), Seite 35] erhalten wir schließlich $N(A)/C(A)\cong A_4\times Z_3$.

§ 7. Der Fall $(ii)_3$ aus Lemma 2.4

Lemma 7.1. *Es sei zunächst $N(A)/C(A)$ isomorph zu A_4. Dann besitzt eine Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ eine zu $Z_4\times Z_4\times Z_2$ isomorphe maximale Untergruppe S_M. In $S\setminus S_M$ liegen nur Involutionen. Wir haben $3=|N(S)/SC(S)|_{2'}$. In $N(S)/SC(S)$ existiert ein Element, das die drei von A verschiedenen elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 in S verbindet und treu auf W bzw. trivial auf $\langle ut\rangle$ operiert.*

Beweis. Es kann angenommen werden, daß in $S\setminus A$ Involutionen existieren, da andernfalls A charakteristisch in S ist und dann ähnlich wie früher ein Widerspruch zur Einfachheit von G folgt. Mit Hilfe von [3, Lemma 2, Seite 389] sehen wir, daß es in S keine elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 2^5 gibt.

Es seien x und y Involutionen in $S\setminus A$ mit $S=\langle A, x, y\rangle$, weiterhin gelte $t^x=ti$ und $t^y=tz$. Man rechnet nach, daß tx und ty die Ordnung vier haben und miteinander vertauschbar sind. Wir setzen $S_M=\langle tx\rangle\times\langle ty\rangle\times\langle ut\rangle$. Da S genau 39 Involutionen enthält, S_M jedoch nur sieben Involutionen besitzt, können in $S\setminus S_M$ nur Involutionen liegen.

Die Faktorgruppe $N(A)/C(A)$ ist isomorph zu A_4 und es existiert ein Element der Ordnung drei in $N(A)/C(A)$, das treu auf W bzw. trivial auf $\langle ut\rangle$ operiert, daher folgen mit Hilfe des Frattini-Argumentes die restlichen Behauptungen von Lemma 7.1.

Lemma 7.2. *Es sei T eine S enthaltende Sylow-2-Untergruppe von G und T_1 Zentralisator von $\langle ut\rangle\times W$ in T. Es hat T_1 folgende Eigenschaften:* (i) *T_1 besitzt eine maximale Untergruppe T_2 mit $T_2\cong Z_{2^n}\times Z_{2^n}\times Z_2$ — $2\leqq n$,* (ii) *in $T_1\setminus T_2$ liegen nur Involutionen,* (iii) *es gibt in T_1 vier Konjugiertenklassen von elementar abelschen*

Untergruppen der Ordnung 16. *In* $N(T_1)/T_1C(T_1)$ *existiert ein Element, das die drei* A *nicht enthaltenden Konjugiertenklassen von elementar abelschen Untergruppen der Ordnung* 16 *in* T_1 *verbindet und treu auf* W *bzw. trivial auf* $\langle ut\rangle$ *operiert. Schließlich ist* $3=|N(T_1)/T_1C(T_1)|_{2'}$.

Beweis. Es sei T_{11} eine S enthaltende Untergruppe von T_1 mit maximaler Ordnung, so daß T_{11} alle in der Behauptung des Lemmas für T_1 geforderten Eigenschaften habe. Es liege T_{12} vom Index zwei in T_{11} mit $T_{12}=Z_2m\times Z_2m\times Z_2$. Wir nehmen an, die Gruppe T_{11} sei echt in T_1 enthalten. Wir wählen nun ein Element y_1, das in $N_{T_1}(T_{11})\setminus T_{11}$ liegt und dessen Quadrat in T_{11} enthalten ist. Dieses Element bewirkt auf den vier Konjugiertenklassen von elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 in T_{11} eine Permutation der Ordnung zwei. Es sei r ein Element aus $N(T_{11})$ mit $\langle rT_{11}C(T_{11})\rangle\cong Z_3$, dann ist $\langle y_1T_{11}C(T_{11}), rT_{11}C(T_{11})\rangle$ isomorph zu A_4. Eine Sylow-2-Untergruppe T_0 des vollen Urbildes dieser zu A_4 isomorphen Gruppe in $N(T_{11})$ liegt in T_1 und enthält T_{11} mit dem Index vier. Wir wählen zu y_1 noch ein Element y_2 in $T_0\setminus T_{11}$, so daß T_0 von T_{11}, y_1 und y_2 erzeugt wird.

Sind in $T_0\setminus T_{11}$ keine Involutionen vorhanden, so ist T_0 schon Sylow-2-Untergruppe von G und wir erhalten leicht einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Sei x eine Involution in $T_0\setminus T_{11}$. Gibt es in xT_{11} weniger als $|T_{11}|/2$ Involutionen, so liegt jede Involution aus $T_0\setminus T_{11}$ in einer elementar abelschen Untergruppe der Ordnung 16 von T_0, deren Normalisator in T_0 mindestens die Ordnung 2^7 besitzt und wie oben folgt ein Widerspruch.

In xT_{11} existieren genau $|T_{11}|/2$ Involutionen. Da x zwei Konjugiertenklassen von elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 aus T_{11} konjugiert, gibt es zwei Involutionen a und b in T_{11}, die unter T_{11} nicht konjugiert sind, deren Produkt ein Element maximaler Ordnung in T_{12} ist und die durch x verbunden werden. Die Gruppe $\langle T_{12}, xa\rangle$ enthält T_{12} mit dem Index zwei und ist maximal in $\langle x, T_{11}\rangle$. Man rechnet nach, daß in $\langle x, T_{11}\rangle\setminus\langle T_{12}, xa\rangle$ nur Involutionen liegen und $\langle T_{12}, xa\rangle$ isomorph ist zu $Z_2m+1\times Z_2m\times Z_2$.

Sei y eine Involution aus $T_0\setminus\langle x, T_{11}\rangle$, dann gilt $T_0=\langle x, y, T_{11}\rangle$. Da T_0 keine elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 32 enthält sind x und y nicht miteinander vertauschbar. Das Element ya besitzt die Ordnung 2^{m+1}, die Gruppe $\langle T_{12}, xa, ya\rangle$ enthält $\langle T_{12}, xa\rangle$ mit dem Index zwei und ist maximal in T_0. Wiederum stellt man durch Abzählen fest, daß es in $T_0\setminus\langle T_{12}, xa, ya\rangle$ nur Involutionen gibt. Dann folgt sofort: $\langle T_{12}, xa, ya\rangle=\langle xa\rangle\times\langle ya\rangle\times\langle ut\rangle\cong Z_2m+1\times Z_2m+1\times Z_2$.

Die Gruppe T_0 hat alle für T_{11} geforderten Eigenschaften und enthält T_{11} echt. Die Annahme $T_{11}\subsetneqq T_1$ ist falsch, die Behauptung des Lemmas richtig.

Lemma 7.3. *Die Gruppe* $W\times\langle ut\rangle$ *ist in einer Sylow-2-Untergruppe* T *von* G, *die* $S\in\mathrm{Syl}_2(N(A))$ *enthält, normal. Außerdem gilt* $T/T_1\cong E_4$, *wobei* T_1 *der Zentralisator von* $W\times\langle ut\rangle$ *in* T *sein soll.*

Beweis. Aus der Struktur von T_1 ergibt sich, daß T_1 noch nicht Sylow-2-Untergruppe von G ist. Es sei x ein Element aus $N_T(T_1)\setminus T_1$, dessen Quadrat in T_1 liegt, und r sei ein Element aus $N(T_1)$, so daß $\langle rT_1C(T_1), xT_1C(T_1)\rangle$ isomorph zu A_4 ist. Es enthält T damit eine Untergruppe T_0 mit $T_0/T_1\cong E_4$. Alle elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 von T_1 sind unter T_0 konjugiert. Falls es in $T_0\setminus T_1$ Involutionen gibt, hat der Zentralisator einer Involution aus $T_0\setminus T_1$ mindestens die Ordnung 16. Für eine beliebige Involution c in der Menge $T_0\setminus T_1$ ist jedoch $c^g\neq t$ für alle $g\in G$. Daraus schließen wir, daß T_0 gleich T ist, und sämtliche Behauptungen des Lemmas sind bewiesen.

Lemma 7.4. *Der Fall $N(A)/C(A)\cong A_4$ aus* (ii)$_3$ *von Lemma* 2.4 *ist nicht möglich.*

Beweis. Es sei T eine Sylow-2-Untergruppe von G, die A enthält, und $T_1=$ $=C_T(\langle ut\rangle\times W)$. Wir wählen zwei Elemente x und y in $T\setminus T_1$, so daß $T=\langle x, y, T_1\rangle$ ist. Es sei T_2 die abelsche Untergruppe vom Index zwei in T_1. Eine Anwendung des Thompson Transfer Lemmas auf die Involution t und die maximale Untergruppe $\langle T_2, x, y\rangle$ von T liefert den gesuchten Widerspruch.

Lemma 7.5. *Es sei $N(A)/C(A)$ isomorph zu S_4. Mit U bezeichnen wir die zu A_4 isomorphe Untergruppe von $N(A)/C(A)$ und mit S_1 eine Sylow-2-Untergruppe des vollen Urbildes von U in $N(A)$. Die Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ enthalte S_1. Dann gilt: S_1 besitzt eine zu E_{32} isomorphe Untergruppe, in S liegt außerhalb von S_1 noch genau eine weitere elementar abelsche Untergruppe der Ordnung* 16.

Beweis. Gibt es in $S_1\setminus A$ keine Involutionen, so ist A offensichtlich charakteristisch in S_1. Da $N(A)/C(A)$ isomorph zu S_4 ist, folgt sogar A char S, und die Gruppe S ist schon Sylow-2-Untergruppe von G. Die Involution t kann nicht aus A in $S\setminus A$ konjugiert werden. Man erhält einen Widerspruch zur Einfachheit von G. Es existieren also in $S_1\setminus A$ Involutionen.

Wir nehmen an, daß S_1 keine elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 2^5 besitzt. Dann folgt wie in Lemma 7.1 die Existenz einer zu $Z_4\times Z_4\times Z_2$ isomorphen Untergruppe von S_1. Es kann t wiederum nicht aus S_1 in $S\setminus S_1$ herauskonjugiert werden. Es sei x ein Element in $S\setminus S_1$. Unter Zuhilfenahme der Beweise von Lemma 7.2 und 7.3 folgt, daß eine Sylow-2-Untergruppe T von G eine Untergruppe T_T vom Index zwei besitzt, die die gleiche Struktur wie die in Lemma 7.3 mit T bezeichnete Gruppe aufweist und für die gilt: $\langle x, T_T\rangle=T$. Es enthält T_T eine maximale Untergruppe T_M, in die t nicht durch Elemente aus G konjugiert werden kann. Dann läßt sich t aber auch nicht in die maximale Untergruppe $\langle x, T_M\rangle$ von T konjugieren.

Die Gruppe S_1 besitzt also einen elementar abelschen Normalteiler S_E der Ordnung 2^5. Da G nach Voraussetzung einfach sein soll, erzwingt das Thompson

Transfer Lemma die Existenz von Involutionen in $S \setminus S_1$. Außerdem finden wir in S noch genau eine zu E_{16} isomorphe Untergruppe, die mit S_1 den Schnitt acht hat.

Lemma 7.6. *Wir verwenden die Bezeichnungen von Lemma 7.5. Es sei T eine S enthaltende Sylow-2-Untergruppe von G. Dann ist der elementar abelsche Normalteiler S_E der Ordnung 2^5 von S_1 auch normal in T und es gilt: $T/S_E \cong D_{2^r}$ mit $2 \leqq r$.*

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 7.5 ergibt sich, daß S_E normal in S liegt und die Faktorgruppe S/S_E isomorph zu D_4 ist.

Wir nehmen an, die Behauptung in Lemma 7.6 sei falsch und wählen eine Untergruppe T_1 von T, die maximal in T ist bezüglich folgender Eigenschaften: (i) $S \subseteqq T_1$, (ii) S_E liegt normal in T_1, (iii) T_1/S_E ist isomorph zu einer Diedergruppe. Es sei T_Z das volle Urbild von $Z(T_1/S_E)$ in T_1. Dann gilt $T_Z = \langle S_E, xt \rangle$, wobei x eine Involution aus $S \setminus S_1$ ist. Ist v ein Element aus $N_T(T_1) \setminus T_1$, dessen Quadrat in T_1 liegt, so sind alle Involutionen aus $T_1 \setminus T_Z$ unter $\langle v, T_1 \rangle$ konjugiert. Wir sehen nun, daß die Gruppe S_E normal in $\langle v, T_1 \rangle$ liegt. Wie früher folgt die Existenz von Involutionen in vT_1, o. B. d. A. sei v selbst eine Involution. Nun gilt $\langle vS_E, tS_E \rangle = \langle v, T_1 \rangle / S_E$, und diese Gruppe ist isomorph zu einer Diedergruppe. Da T_1 echt in $\langle v, T_1 \rangle$ liegt, ergibt sich ein Widersoruch zur maximalen Wahl von T_1. Die Behauptung in Lemma 7.6 ist richtig.

Lemma 7.7. *Der Fall $N(A)/C(A) \cong S_4$ unter Punkt* (ii)$_3$ *von Lemma* 2.4 *ist nicht möglich.*

Beweis. Die Behauptung folgt unter Verwendung der Aussage von Lemma 7.6 unmittelbar aus der Struktur einer Sylow-2-Untergruppe T von G und der Voraussetzung, daß G einfach sein soll.

Lemma 7.8. *Es sei $N(A)/C(A)$ isomorph zu $A_4 \times Z_2$. Mit U bezeichnen wir die zu A_4 isomorphe Untergruppe von $N(A)/C(A)$ und mit S_1 eine Sylow-2-Untergruppe von $U(\mathrm{mod}\, C(A))_{N(A)}$. Schließlich sei S eine S_1 enthaltende Sylow-2-Untergruppe von $N(A)$. Dann haben die maximalen elementar abelschen Untergruppen von S alle die Ordnung* 16.

Beweis. Wir haben $Z(S_1) = Z(S) = \langle ut \rangle \times W$. Der Zentralisator einer jeden Involution enthält daher eine elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 16. Es genügt also zu zeigen, daß S keine zu E_{32} oder E_{64} isomorphe Untergruppen besitzt. Gibt es in S eine elementar abelsche Gruppe S_{E6} der Ordnung 2^6, so liefert [3, Lemma 2, S. 389] einen Widerspruch.

Es sei nun S_{E5} eine elementar abelsche Untergruppe der Ordnung 2^5 in S. Falls S_{E5} nicht in S_1 enthalten ist, hat der Zentralisator einer jeden Involution aus $S \setminus A$ in G eine Untergruppe der Ordnung 2^5. Es ist S dann schon Sylow-2-Untergruppe von G. Man ermittelt wieder eine maximale Untergruppe in S, in die die Involution t nicht durch Elemente aus G konjugiert werden kann.

Wir haben bewiesen, daß S_{E5} schon in S_1 gelegen ist. Offensichtlich wird S_{E5} von ganz S normalisiert, es folgt $S/S_{E5} \cong E_4$. Unter Verwendung der Beweise von Lemma 7.6 und 7.7 folgt erneut ein Widerspruch zur Einfachheit von G. Insgesamt ist die Behauptung in Lemma 7.8 richtig.

Lemma 7.9. *Wir verwenden die Voraussetzungen und Bezeichnungen des letzten Lemmas. Die Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)$ besitzt eine zu $Z_4 \times Z_4 \times Z_4$ isomorphe Untergruppe S_Z, so daß in $S \setminus S_Z$ nur Involutionen liegen.*

Beweis. Es seien a, b und c Elemente in $S \setminus A$, die zusammen mit A ganz S erzeugen. Die Gruppe $\langle Z(S), a, b, c \rangle$ enthält t nicht und ist maximal in S. Da G nach Voraussetzung einfach ist, kann S noch keine Sylow-2-Untergruppe von G sein.

In jeder nichttrivialen Nebenklasse von A in S liegen höchstens acht Involutionen, daher gibt es in S höchstens acht elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 16. Wir erhalten: $2 \leqq |N(S)/SC(S)|_2 \leqq 2^3$. Liegen in S genau acht elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 16, dann zeigt eine ähnlich wie in Lemma 7.1 verlaufende Rechnung sofort, daß S die in der Aussage von Lemma 7.9 angegebene Struktur besitzt.

Wir nehmen nun an, S habe weniger als acht zu E_{16} isomorphe Untergruppen. Dann gilt $|N(S)/SC(S)|_2 \leqq 4$. Es sei zunächst $|N(S)/SC(S)|_2 = 4$. Mit S_1 bezeichnen wir wieder eine in S enthaltene Sylow-2-Untergruppe des vollen Urbildes der zu A_4 isomorphen Untergruppe von $N(A)/C(A)$ in $N(A)$. Es gibt eine Sylow-2-Untergruppe T_1 von $N(S)$, die die maximale Untergruppe S_1 von S normalisiert. Damit erhalten wir: Es gibt in S_1 eine zu $Z_4 \times Z_4 \times Z_2$ isomorphe Untergruppe, außerhalb dieser Untergruppe liegen in S_1 nur Involutionen. Von den vier elementar abelschen Ulntergruppen der Ordnung 16 in S_1 sind die drei von A verschiedenen durch ein Eement der Ordnung drei aus $N(S)/SC(S)$ konjugiert. Ein Element der Ordnung zwei von $N(S)/SC(S)$ operiert ebenfalls nichttrivial auf den vier elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 in S_1. Daher wird $N(S)/SC(S)$ isomorph zu A_4. Die Anzahl der nicht in S_1 liegenden elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16 von S ist eins oder drei. Im letzteren Falle sind die drei Gruppen durch ein Element aus G konjugiert. Es folgt, daß die Ordnung des Normalisators einer zu E_{16} isomorphen Untergruppe von S, die nicht in S_1 liegt, mindestens von 16 geteilt wird. Die Involution t kann also nicht aus S_1 in $S \setminus S_1$ herauskonjugiert werden. Wie im zweiten Absatz des Beweises von Lemma 7.5 ergibt sich dann, daß eine Sylow-2-Untergruppe T von G eine maximale Untergruppe besitzt, in die man die Involution t aus T nicht durch Elemente von G hineinkonjugieren kann. Dies widerspricht der Einfachheit der Gruppe G.

Es sei nun $|N(S)/SC(S)|_2 = 2$. In diesem Falle ist S_1 in einer Sylow-2-Untergruppe T_1 von $N(S)$ nicht normal. Für ein Element y aus $T_1 \setminus S$ wird $\langle S_1, S_1^y \rangle = S$.

Ist $B=A^y$, so wird $\langle A, B\rangle = D$ isomorph zu $D_8 \times E_4$. Wir wählen zwei Elemente a und b in $S_1 \setminus A$, die zusammen mit A bereits S_1 erzeugen. Dann wird S von D, a und b erzeugt. Außerhalb von D liegen in S drei elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 16, die alle in G konjugiert sind, oder aber es gibt keine zu E_{16} isomorphen Untergruppen außerhalb von D in S. Wiederum erhalten wir, daß die Ordnung des Normalisators einer zu E_{16} isomorphen Untergruppe von S, die nicht in D liegt, mindestens von 16 geteilt wird. Die Involution t kann in G nicht aus D in $S \setminus D$ herauskonjugiert werden. Von der Gruppe D ausgehend kann man unter Zuhilfenahme der Beweisverfahren von Paragraph drei wieder mittels Induktion nachweisen, daß eine Sylow-2-Untergruppe T von G eine maximale Untergruppe enthält, in die sich die Involution t nicht durch Elemente aus G konjugieren läßt. Mit Hilfe des Thompson Transfer Lemmas ergibt sich ein Widerspruch zur Einfachheit von G.

Die Annahme, S habe weniger als acht elementar abelsche Untergruppen der Ordnung 16, hat sich als falsch erwiesen. Mit den Ergebnissen zu Beginn des Beweises folgt die Behauptung des Lemmas.

Lemma 7.10. *Es sei T eine Sylow-2-Untergruppe von G. Es liege außerdem wieder der Fall $N(A)/C(A) \cong A_4 \times Z_2$ vor. Dann hat T folgende Struktur:* (i) *T besitzt eine maximale Untergruppe, die isomorph zum direkten Produkt dreier zyklischer Gruppen ist,* (ii) *außerhalb dieser maximalen Untergruppe liegen in T nur Involutionen.*

Beweis. Es sei T so gewählt, daß die Sylow-2-Untergruppe S von $N(A)/C(A)$ in T liegt. Mit T_0 bezeichnen wir eine S enthaltende Untergruppe maximaler Ordnung von T, so daß T_0 eine zum direkten Produkt dreier zyklischer Gruppen isomorphe Untergruppe T_{0Z} vom Index zwei hat und in $T_0 \setminus T_{0Z}$ nur Involutionen liegen. Die Gruppe T_0 besitzt genau acht Konjugiertenklassen von elementar abelschen Untergruppen der Ordnung 16, daher gilt $|N_T(T_0) \colon T_0| \leqq 8$.

Wir nehmen nun an, T_0 liege echt in T. Da T_0 maximal in T gewählt wurde, gibt es in $N_T(T_0)$ außer T_0 selbst keine weitere zu T_0 isomorphe Untergruppe. Es liegt somit T_0 normal mit dem Index zwei, vier oder acht in T.

Es sei zuerst $|T \colon T_0| = 2$. Gibt es in $T \setminus T_0$ keine Involution, so wählen wir uns ein Element x aus $T \setminus T_0$ und sehen, daß t nicht in die maximale Untergruppe $\langle T_{0Z}, x\rangle$ von T konjugiert werden kann. Existiert in $T \setminus T_0$ eine Involution y, dann kann t nicht in die maximale Untergruppe $\langle T_{0Z}, yt\rangle$ von T konjugiert werden. In beiden Fällen folgt mit Hilfe des Thompson Transfer Lemmas ein Widerspruch zur Einfachheit von G.

Es sei nun $|T \colon T_0| = 4$. Ist T/T_0 isomorph zu Z_4, dann wählen wir uns ein Element a, das in T modulo T_0 die Ordnung vier hat. Es kann t wiederum nicht in die maximale Untergruppe $\langle T_{0Z}, a\rangle$ von T konjugiert werden. Im Falle $T/T_0 \cong E_4$ können wir nach dem bisher bewiesenen annehmen, daß es Involutionen x und y in $T \setminus T_0$ gibt, so daß T von T_0, x und y erzeugt wird. Es kann t nicht durch Elemente aus G in die maximale Untergruppe $\langle T_{0Z}, xt, yt \rangle$ von T konjugiert werden, wieder ergibt sich ein Widerspruch zur Einfachheit von G.

Schließlich gelte $|T: T_0|=8$. Ist T/T_0 isomorph zu Z_8, Q_8, D_8 oder $Z_4 \times Z_2$, so folgt aufgrund der bisherigen Ergebnisse dieses Lemmas erneut die Existenz einer maximalen Untergruppe von T, in die die Involution t nicht durch Elemente aus G hineinkonjugiert werden kann. Im Falle $T/T_0 \cong E_8$ können wir annehmen, daß Involutionen x, y und w in $T \setminus T_0$ existieren, die zusammen mit T_0 ganz T erzeugen. Auch in diesem Falle ist t nicht in die maximale Untergruppe $\langle T_{0Z}, xt, yt, wt \rangle$ von T konjugierbar.

Die Annahme, daß T_0 echt in T liegt, hat sich als falsch erwiesen, die Behauptung des Lemmas ist richtig.

Lemma 7.11. *Der Fall $N(A)/C(A) \cong A_4 \times Z_2$ tritt nicht auf.*

Beweis. Es sei S eine Sylow-2-Untergruppe von $N(A)$ und T eine S enthaltende Sylow-2-Untergruppe von G. Mit Hilfe von Lemma 7.10 sehen wir, daß T eine maximale Untergruppe enthält, in die t nicht durch Elemente aus G hineinkonjugiert werden kann. Wir erhalten einen endgültigen Widerspruch zur Einfachheit von G.

Literatur

[1] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row (1968).
[2] D. Gorenstein and K. Harada, A characterization of Janko's two new simple groups, *J. Fac. Science, Univ. Tokyo*, Sec I, **16** (1970), 331—406.
[3] K. Harada, Finite simple groups whose Sylow-2-subgroups are of order 2^7, *J. of Algebra*, **14** (1970), 386—404.
[4] K. Harada, Finite simple groups whose Sylow-2-subgroups are of order 2^8, *unveröffentlicht.*
[5] B. Huppert, *Endliche Gruppen.* I, Springer (1967).
[6] Z. Janko, Some new simple groups of finite order, *Symposia Math. Roma* (1968), 25—64.
[7] A. MacWilliams, On 2-groups with no normal abelian subgroup of rank 3, and their occurrence as Sylow-2-subgroups of finite simple groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150** (1970), 345—408.
[8] J. G. Thompson, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 383—437.
[9] J. H. Walter, The characterization of finite groups with abelian Sylow-2-subgroups, *Ann. of Math.*, **89** (1969), 405—576.

(Eingegangen am 18. Februar 1974)